Sonuç: $\mathbb{C}^m_n$, $\mathbb{C}$ üzerinde vektör uzayı olduğunda boy $\mathbb{C}^m_n = mn$ dir.

Matris Çarpımı:

$A = [a_{ij}] \in \mathcal{F}^m_n$, $B = [b_{jk}] \in \mathcal{F}^n_p$ matrisleri için A ile B nin çarpımı

$$AB = [a_{ij}]_{m\times n} [b_{jk}]_{n\times p}$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right] = [c_{ik}]_{m\times p} \in \mathcal{F}^m_p \text{ ile}$$

tanımlanır. O halde

$\cdot ; \mathcal{F}^m_n \times \mathcal{F}^n_p \longrightarrow \mathcal{F}^m_p$ (ne iç işlem ne de dış işlem)

Matris Çarpımının Özellikleri

1) A, B, C çarpılabilir matrisler olmak üzere

$A(BC) = (AB)C$ birleşimlidir.

2) $A(B+C) = AB + AC$
$(A+B)C = AC + BC$
$\Big\}$ Matris toplamı işlemi üzerine dağılımlıdır.

3) $\lambda \in \mathcal{F}$ için $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ dir.

Örnek: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1\times 3} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1} = [10]_{1\times 1}$

ispat 1: Matris çarpımı işleminin birleşmeli olduğunu gösterelim:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n},\quad B=[b_{jk}]_{n\times p},\quad C=[c_{kt}]_{p\times s}$$

$$A(BC)\overset{?}{=}(AB)C$$

$$BC=[b_{jk}]_{n\times p}[c_{kt}]_{p\times s}$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kt}\right]=[d_{jt}]_{n\times s}$$

$$AB=[a_{ij}]_{m\times n}[b_{jk}]_{n\times p}$$

$$=\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right]=[e_{ik}]_{m\times p}$$

$$A(BC)=[a_{ij}]_{m\times n}[d_{jt}]_{n\times s}$$

$$=\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_{jt}\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kt}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{p}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)}_{e_{ik}}c_{kt}$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{p} e_{ik}c_{kt}\right]=(AB).C$$

Tanım (Kare Matris): Satır ve sütun sayısı eşit olan matrise kare matris denir. $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinde $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elemanlarının bulunduğu köşegene matrisin esas köşegeni denir ya da sadece köşegeni denir.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

köşegen

Tanım (Birim Matris):

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinde $i=j$ için $a_{ij}=1$ $i\neq j$ için $a_{ij}=0$ ise A matrisine birim matris denir ve I_n ile gösterilir.

$$I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

NOT: $\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$ Kronecker deltası olmak üzere

$I_n=[\delta_{ij}]_{n\times n}$ yazılabilir.

$$I_n=\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & & & \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix}$$

Teorem: $\forall A \in \mathcal{F}^m{}_n$ için $A I_n = I_m A = A$ dır

İspat: $A I_n \overset{?}{=} A$

$$A I_n = [a_{ij}]_{m\times n} [\delta_{jk}]_{n\times n}$$
$$= \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{jk}\right] = [a_{ik}]_{m\times n} = A$$

$$I_m A = [\delta_{ij}]_{m\times m} [a_{jk}]_{m\times n}$$
$$= \left[\sum_{j=1}^{m} \delta_{ij} a_{jk}\right] = [a_{ik}]_{m\times n} = A$$

Sonuç: Birim matris, matris çarpımı işleminin birim elemanıdır.

Tanım (Ters Matris (İnvers Matris)):

$A \in \mathcal{F}^n{}_n$ kare matrisi için $AB = BA = I_n$ olacak şekilde $B \in \mathcal{F}^n{}_n$ varsa B'ye A nın inversi denir, ve $A^{-1} = B$ ile gösterilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

$A.A^{-1} = A^{-1}A = I_2$ olmalı. $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ olsun.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x+3z & 2y+3t \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

$2x+3z = 1$ $\quad 2y+3t = 0$

$x = 0$ $\quad y = 1$ $\quad z = \frac{1}{3}$ $\quad t = -\frac{2}{3}$

Örnek! $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ -1 & 1/2\end{bmatrix}$ için $A^{-1}=B$ old. göst.

$AB=BA=I_2$ olmalı.

$$AB=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ -1 & 1/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2$$

$$BA=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ -1 & 1/2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2$$

Tanım (Bir Matrisin Transpozu (Devriği)): $A=[a_{ij}]_{m\times n}\in \mathcal{F}^m{}_n$ matrisinin satırlarını sütun yada sütunlarını satır almakla elde edilen matrise A nın transpozu denir, A^t, A^T veya A^D sembollerinden biriyle gösterilir.

$$A^t=[a_{ji}]_{n\times m} \quad , \quad t:\mathcal{F}^m{}_n \longrightarrow \mathcal{F}^n{}_m \text{ dir.}$$

Özellikleri

1) $A,B\in \mathcal{F}^m{}_n$ için $(A+B)^t=A^t+B^t$

2) $A\in \mathcal{F}^m{}_n$ için $(A^t)^t=A$

3) $A\in \mathcal{F}^m{}_n$ ve $\lambda\in \mathcal{F}$ için $(\lambda A)^t=\lambda A^t$

4) $A\in \mathcal{F}^m{}_n$, $B\in \mathcal{F}^n{}_p$ için $(AB)^t=B^tA^t$ dir.

İspat:

1) $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$

$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]=[c_{ij}]$

$$(A+B)^t=[c_{ji}]_{n\times m}=[a_{ji}+b_{ji}]=[a_{ji}]+[b_{ji}]$$
$$=A^t+B^t$$

4) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{jk}]_{n\times p}$

$$A.B = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right] = [c_{ik}]_{m\times p}$$

$$(A.B)^t = [c_{ki}]_{p\times m} = \left[\sum_{j=1}^{n} b_{kj} a_{ji}\right] =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ji} b_{kj}\right] = \left[\sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^t (b_{jk})^t\right]$$

$$= [a_{ij}]^t [b_{jk}]^t = B^t A^t$$

Sonuç: $(A_1 A_2 \ldots A_n)^t = A_n^t A_{n-1}^t \ldots A_2^t A_1^t$ dir.

Teorem: A ve B inversleri var olan iki kare matris olsun. Bu durumda A.B ninde inversi vardır ve

$$(AB)^{-1} = B^{-1} . A^{-1} \text{ dir.}$$

İspat:

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= ((AB)B^{-1})A^{-1} \\ &= (A\underbrace{(BB^{-1})}_{I_n})A^{-1} \\ &= AA^{-1} = I_n \quad -- (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}(AB)) &= B^{-1}((A^{-1}A)B) \\ &= B^{-1} I_n B \\ &= B^{-1}B = I_n \quad -- (2)\end{aligned}$$

(1) ve (2) den invers matris tanımı gereğince

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

bulunur.

Örnek! Bir matrisin tersi eğer varsa tektir, Gösteriniz.

Çözüm: $A \in F^n_n$ in B_1 ve B_2 gibi iki tersi olduğunu kabul edelim.

Ters matris tanımı gereği

$$AB_1 = B_1A = I_n \quad \text{ve} \quad AB_2 = B_2A = I_n \text{ dir.}$$

$$B_1 = I_nB_1 = (B_2A)B_1 = B_2(AB_1) = B_2I_n = B_2 \text{ dir.}$$

Tanım; bir A kare matrisi için

$$A^0 = I_n \;,\; A^1 = A \;,\; A^2 = AA \;,\; A^3 = A^2A \;, \ldots, A^n = A^{n-1}A$$

olmak üzere

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $a_i \in F$ n-yinci dereceden polinom fonksiyonunda x yerine A matrisi alınmakla elde edilen

$$f(A) = a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_nA^n$$ polinomuna matris polinomu denir. $f(A) = 0$ ise A ya bu polinomun kökü veya sıfırı denir.

Örnek; $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisini $g(x) = 3x^2 - 6x + 3$ polinomunun kökü olduğunu gösteriniz.

$$g(A) = 3A^2 - 6A + 3I_2 = 0\,?$$

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g(A) = 3\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$